

UNIVERSITE DE GENEVE

Institut de physique
théorique

FACULTE DES SCIENCES

Professeur J.M.Jauch

DE LA DECOMPOSITION DES TREILLIS ORTHOMODULAIRES

THESE

présentée à la Faculté des sciences
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de docteur ès sciences physiques
par

Hans-Peter MATTER

de

Pieterlen (BE)

Thèse N° 1512

Genève
Ecole de Physique
1970

UNIVERSITE DE GENEVE

Institut de physique
théorique

FACULTE DES SCIENCES

Professeur J.M.Jauch

DE LA DECOMPOSITION DES TREILLIS ORTHOMODULAIRES

THESE

présentée à la Faculté des sciences
de l'Université de Genève
pour obtenir le grade de docteur ès sciences physiques
par

Hans-Peter MATTER

de

Pieterlen (BE)

Thèse N° 1512

Genève
Ecole de Physique
1970

La faculté des sciences, sur le préavis du professeur Jauch, directeur de thèse, et d'une commission composée des professeurs Piron et Frölicher, autorise l'impression de la présente thèse, sans exprimer d'opinion sur les propositions qui y sont énoncées.

Genève, le 16 mars 1970

Le doyen

Marc VUAGNAT

Thèse N° 1512



REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance à mon directeur de thèse, le professeur Jauch, pour l'intérêt bienveillant avec lequel il a suivi et encouragé ce travail.

Je voudrais aussi exprimer ma gratitude au professeur Piron pour l'appui qu'il m'a fourni, pour les précieux conseils qu'il m'a prodigué et pour les fructueuses discussions que nous avons eu.

Enfin je remercie le professeur Frölicher qui m'a fait l'honneur d'accepter la charge de juré de thèse.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	p. 1
DEFINITIONS	p. 8
EXEMPLES	p. 15
DECOMPOSITION	p. 22
CONCLUSION	p. 32

INTRODUCTION

Les travaux récents [4 , 7] sur l'axiomatique de la physique quantique ont montré que la structure d'un micro-système peut être caractérisée mathématiquement de manière complète par la structure d'un treillis de propositions élémentaires. Ces propositions sont des classes d'équivalence d'expériences dont le résultat s'exprime par "oui" ou "non" .

Dans la physique quantique habituelle les propositions sont représentées par les projecteurs d'une algèbre de von Neumann, et il est bien connu que l'ensemble de ces projecteurs détermine complètement l'algèbre de von Neumann à laquelle ils appartiennent. Pour étudier ces algèbres il suffit donc d'analyser la structure de l'ensemble de ces projecteurs qui est celle d'un treillis complet orthocomplémenté. J. von Neumann a montré que les algèbres qui portent son nom sont essentiellement de trois types qu'il désigne par I, II et III. Sa classification repose sur un concept élémentaire défini au moyen d'une relation d'équivalence ($\sim$). Un projecteur F est dit fini si tout autre projecteur E majoré par F ($F E = E F = E \iff E \leq F$) et équivalent à F lui est égal. Une algèbre de von Neumann est alors dite de type I si tous ses projecteurs sont borne supérieure de projecteurs P atomiques ($E < P \Rightarrow E = \emptyset$) ; de type II si tous ses projecteurs sont borne supérieure de projecteurs finis et ne majorent aucun projecteur atomique ; de type III si elle ne contient aucun projecteur fini. De plus, si dans le type I (resp. II) tous les

projecteurs sont finis on dit que l'algèbre de von Neumann correspondante est de type fini et nous la noterons I_n (resp. II_1).

Les treillis des projecteurs des algèbres de von Neumann de type fini possèdent une propriété de structure qui s'appelle la modularité. Ce sont donc des treillis complets, orthocomplémentés et modulaires. Or les treillis de propositions des systèmes physiques qu'on a étudiés ne sont pas tous modulaires (voir [4]). Il a été possible de montrer par exemple qu'un système localisable, c'est-à-dire un système qu'on appelle en physique une particule, possède un système de propositions non modulaire. Toutefois il subsiste une structure plus faible qu'on appelle orthomodularité.

Le point de vue de cette thèse sera d'étudier la classification des treillis abstraits, sans supposer qu'il s'agit du treillis des projecteurs d'une algèbre de von Neumann. Dans ce cas on a moins de structure et pour arriver à une classification analogue à celle de von Neumann pour les treillis des projecteurs dans un espace hilbertien il faut supposer certaines propriétés supplémentaires. Le but de ce travail est de donner ces conditions supplémentaires dans une forme qui pourrait se prêter à une interprétation physique.

Il y a plusieurs possibilités de postuler des structures supplémentaires. Mentionnons tout d'abord l'axiomatique qui a récemment été formulée par C. Piron et J.M. Jauch (voir [7]) qui conduit à des treillis complets, orthomodulaires, atomi-



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41545925_0043

ques et satisfaisant une certaine forme de la loi de couverture. L'atomicité et la loi de couverture sont des restrictions très fortes qui ne sont vérifiées que dans les treillis du type I, comme l'a montré C.Piron (voir [4]). Remarquons que du point de vue mathématique on peut remplacer la loi de couverture (qui a une interprétation physique) par une autre loi équivalente dans les treillis atomiques [6] et qui la généralise dans les autres. Cette propriété est appelée M-symétrie et on dit aussi que le treillis est semi-modulaire.

M.D. MacLaren [5] a introduit une propriété plus faible que l'atomicité, appelée par lui "nearly modular" qui permet des réalisations du type I et II.

Nous aimerions introduire une condition encore plus faible qui permette de retrouver les treillis des trois types I, II et III introduits par von Neumann, mais suffisamment forte pour qu'on puisse effectuer une décomposition canonique du treillis dans ces trois types.

L'essentiel de cette propriété s'exprime par une relation d'équivalence entre certains éléments du treillis. Dans les treillis des projecteurs d'un espace hilbertien une telle relation nous est fournie par la structure d'un tel espace. En effet, si $\mathcal{A}$ est une algèbre de von Neumann, deux projecteurs $E, F \in \mathcal{A}$ sont définis équivalents s'il existe une isométrie partielle Ω telle que E est projecteur initial et F projecteur final de Ω , c'est-à-dire si $\Omega^* \Omega = E$ et $\Omega \Omega^* = F$.

Dans un treillis abstrait cette définition, qui se présente naturellement dans le cadre de l'espace hilbertien, n'est plus possible. Aussi L.H. Loomis [1] , S. Maeda [2] et F. Maeda [3] ont-ils étudiés la décomposition des treillis orthomodulaires en postulant l'existence d'une relation d'équivalence satisfaisant certaines conditions. Mais on peut également transposer la définition dans un treillis si on se rappelle que chaque isométrie partielle ($\Omega^* \Omega = E$, $\Omega \Omega^* = F$) définit un isomorphisme $X \rightarrow \Omega X \Omega^*$ de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}_E = \{ X \in \mathcal{A} \mid \exists A \in \mathcal{A} \text{ avec } X = EAE \}$ sur l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}_F$. D'autre part puisque tout projecteur EAE de l'algèbre de von Neumann $\mathcal{A}_E$ est majoré par E ($EAE \cdot E = EAE$), les treillis correspondants aux projecteurs des algèbres $\mathcal{A}_E$ et $\mathcal{A}_F$ sont des segments $[\emptyset, a] = \{ x \mid \emptyset \leq x \leq a \}$ et $[\emptyset, b]$. Enfin rappelons que l'isomorphisme entre $\mathcal{A}_E$ et $\mathcal{A}_F$ défini par l'opérateur partiellement isométrique Ω applique $Z E$ sur $Z F$ pour tout opérateur Z du centre $\mathcal{Z} = \mathcal{A} \cap \mathcal{A}'$.

Nous sommes ainsi amenés à transcrire la définition de l'équivalence de la manière suivante :

Deux éléments a et b d'un treillis complet $\mathcal{L}$ sont dits équivalents ($a \sim b$) par rapport à $\mathcal{L}$ s'il existe un isomorphisme du segment $[\emptyset, a] \subseteq \mathcal{L}$ sur le segment $[\emptyset, b] \subseteq \mathcal{L}$ qui applique $z \wedge a$ sur $z \wedge b$ pour tout élément z du centre de $\mathcal{L}$.

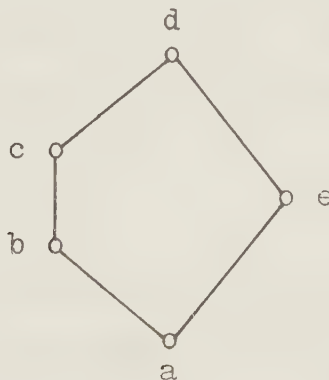
Si de plus l'isomorphisme laisse invariant les éléments du segment $[\emptyset, a \wedge b]$ alors nous dirons que l'équivalence est forte ($a \overset{f}{\sim} b$).

Remarquons ici que la relation $\overset{f}{\sim}$ n'est pas nécessaire-

ment transitive. Avec cette définition de l'équivalence, il suffit maintenant de trouver la structure nécessaire permettant la décomposition du treillis.

Pour les treillis orthomodulaires nous pouvons utiliser la méthode proposée par F. Maeda (voir [3]) car notre définition satisfait les propriétés qu'il exige de sa relation d'équivalence. Mais nous désirons non seulement décomposer le treillis mais surtout retrouver l'essentiel des propriétés des ensembles de projecteurs de type I, II et III. En particulier il convient de commencer par introduire la condition suffisante pour obtenir la modularité des treillis de type I_n et II_1 .

Pour obtenir la modularité des treillis d'éléments finis il faut exclure les sous-treillis d'éléments finis isomorphes au treillis non modulaire suivant :



Puisque deux éléments c et b finis, comparables et équivalents sont identiques par définition, il suffit d'introduire un axiome qui impose l'équivalence de c et b . Si le treillis est orthomodulaire on peut utiliser dans ce but l'existence pour c et b d'un complément commun $(e \vee d') \wedge a' = (e \wedge a') \vee d'$ et introduire l'axiome D' de

Loomis [1] : Deux éléments possédant un complément commun (perspectifs) sont équivalents.

Cette propriété se vérifie aisément dans l'ensemble des projecteurs d'une algèbre de von Neumann si l'on se rappelle que le support du produit de deux projecteurs G et H est donné par :

$$\text{support } GH = H \wedge (G \vee H') \quad \text{où } H' = I - H,$$

et que le théorème de la décomposition polaire affirme pour tout opérateur T l'existence d'une isométrie partielle Ω telle que :

$$\text{support } T = \Omega^* \Omega \sim \Omega \Omega^* = \text{support } T^*.$$

Ainsi si E est un complément commun de F_1 et F_2 on a :

$$\text{support } E' F_{1,2} \sim \text{support } F_{1,2} E'$$

d'où

$$F_{1,2} = F_{1,2} \wedge (E' \vee F'_{1,2}) \sim E' \wedge (F_{1,2} \vee E) = E'$$

c'est-à-dire que $F_1 \sim E' \sim F_2$. Pour obtenir la modularité des treillis de type I_n et II_1 nous pourrions donc introduire la condition suivante : Tout complément a de b est équivalent à b' .

De cette condition découle pour toute paire a, b d'éléments non orthogonaux l'existence d'éléments $a_1 = a \wedge (b \vee a')$ et $b_1 = b \wedge (a \vee b')$ non nuls et équivalents car a_1 est un complément de b_1' . Ainsi si a est un atome non orthogonal à b alors $(a \vee b') \wedge b$ est également un atome. Le treillis vérifie donc la loi de couverture. Or il est bien connu (voir [4]) que tout segment d'un tel treillis est orthomodulaire et vérifie encore la loi de couverture. Aussi allons-nous énoncer la condition de

telle manière que la propriété désirée soit également héritée par tout segment : Tout complément a de b est fortement équivalent à b' .

Avec cette condition plus forte sur un treillis complet orthocomplémenté, on peut démontrer l'orthomodularité. En effet si $a \leq b$, l'élément $b \wedge (a \vee b')$ est un complément de a' et ainsi $b \wedge (a \vee b')$ et a sont équivalents. De plus l'équivalence est forte et $[b \wedge (a \vee b')] \wedge a = a$, ainsi a et $b \wedge (a \vee b')$ sont donc égaux. C'est pourquoi nous proposons l'étude de la décomposition des treillis complets orthocomplémentés vérifiant seulement l'axiome :

A : Si a est un complément de b , alors a est fortement équivalent à b' .

Nous appellerons ces treillis fortement orthocomplémentés.

L'étude de ces treillis est présentée de la manière suivante : après un paragraphe consacré à la définition des diverses structures de treillis possibles avec un rappel des liens entre ces structures, nous vérifierons l'axiome A pour le treillis des projecteurs d'un espace de Hilbert sur un corps complexe ainsi que pour tout treillis modulaire. Puis dans un quatrième paragraphe nous décomposerons le treillis fortement orthocomplémenté et nous démontrerons quelques propriétés des treillis de type I_n , I_∞ , II_1 et II_∞ . Enfin un dernier paragraphe sera consacré à l'interprétation physique de l'axiome A .

DEFINITIONS

Pour aider le lecteur non initié nous allons utiliser dans ce paragraphe consacré aux définitions une représentation des treillis au moyen de diagrammes. Ainsi par exemple, si pour une paire d'éléments a, b on a la relation d'ordre $a \leq b$ et qu'il n'existe aucun élément x tel que $a < x < b$ on dit que b couvre a ($b \prec a$) et l'on représente graphiquement cette situation de la manière suivante :



Si, pour un ensemble partiellement ordonné, il existe un élément $\emptyset$ majoré par tous les autres, nous noterons ce plus petit élément $\emptyset$. Et nous appellerons alors atome un élément qui couvre $\emptyset$. L'ensemble est dit atomique si tout élément différent de $\emptyset$ majore un atome et relativement atomique si tous ses segments $[a, b] \equiv \{x \mid a \leq x \leq b\}$ sont atomiques. S'il existe un élément I majorant tous les autres nous noterons ce plus grand élément I .

Pour une famille d'éléments les relations d'ordre permettent d'effectuer certaines opérations. Définissons par exemple pour la famille $\{\emptyset, a, b, c, d, e, f, g, I\}$ les relations :

$$\emptyset \prec a \prec c \prec f \prec I$$

$$\emptyset \prec a \prec d \prec f \prec I$$

$$\emptyset \prec b \prec e \prec g \prec I$$

$$\emptyset \prec b \prec d \prec g \prec I$$

Dans ce cas la borne inférieure ($f \wedge g$) des éléments f et g

c'est-à-dire le plus grand des éléments $d, a, b, \emptyset$ minorant à la fois f et g est l'élément d . La borne supérieure $(a \vee b)$ des éléments a et b , c'est-à-dire le plus petit des éléments d, f, g, I majorant à la fois a et b est l'élément d . Il est cependant plus aisé de trouver le résultat de ces opérations sur le diagramme suivant, surtout pour les opérations composées.

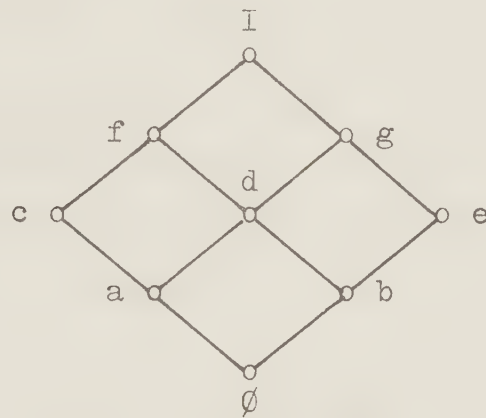


Fig.1

Un ensemble partiellement ordonné dans lequel il existe pour tout couple a, b d'éléments une borne inférieure $(a \wedge b)$ et une borne supérieure $(a \vee b)$ est appelé un treillis. Nous allons maintenant examiner diverses structures particulières de ces treillis.

le treillis est dit distributif si tout triple x, y, z satisfait la condition $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.

Le treillis de la figure 1 est un treillis distributif.

Vérifions une de ces relations dans le treillis de la figure 1. $(c \vee d) \wedge e = f \wedge e = b$, $(c \wedge e) \vee (d \wedge e) = \emptyset \vee b = b$. Tous les treillis ne sont cependant pas distributifs, comme le montre l'exemple suivant :

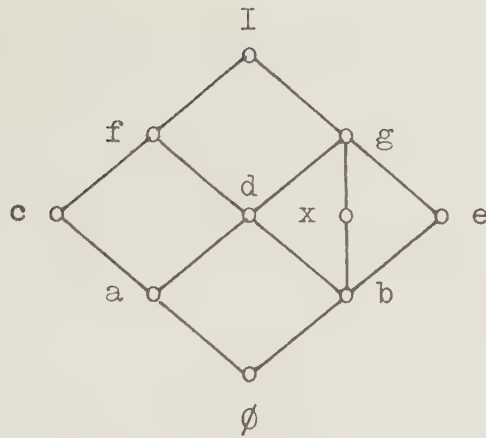


Fig. 2

En effet : $(d \vee x) \wedge e = g \wedge e = e$

$$(d \wedge e) \vee (x \wedge e) = b \vee b = b \neq e.$$

Dans ce treillis il subsiste par contre une autre propriété que l'on appelle la modularité.

On dit qu'un treillis est modulaire s'il satisfait la loi $y \leq z$ implique $y \vee (z \wedge x) = z \wedge (y \vee x)$ pour tout x . Vérifions la relation pour les éléments d, f, x :

$$d \vee (f \wedge x) = d \vee b = d ; f \wedge (d \vee x) = f \wedge g = d$$

Mais il existe aussi des treillis non modulaires comme celui de la figure 3 :

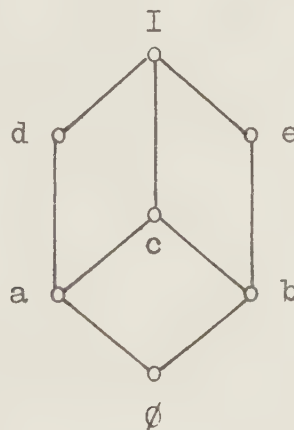


Fig. 3

En effet, on a $a < d$ et $a \vee (d \wedge e) = a \vee \emptyset = a$,
 $d \wedge (a \vee e) = d \wedge I = d$.

Il existe cependant dans ce treillis non modulaire des

couples d'éléments qui satisfont la relation de modularité. Ainsi par exemple le couple (d, c) vérifie pour tout $x \leq c$ la relation $x \vee (c \wedge d) = c \wedge (x \vee d)$, on dit alors que la paire (d, c) est une paire modulaire et on la note $(d, c) M$.

Lorsqu'une paire est modulaire si et seulement si la paire symétrique l'est également on dit que le treillis est M-symétrique (on dit parfois aussi qu'il est semimodulaire). On vérifie aisément cette propriété dans le treillis de la figure 3 alors qu'elle n'est pas réalisée dans le treillis suivant :

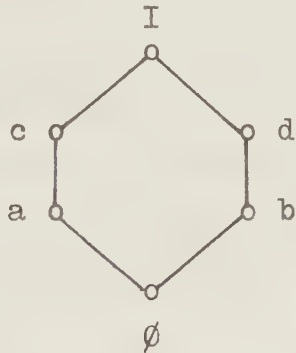


Fig. 4

En effet, la paire (c, b) est modulaire contrairement à la paire (b, c) . Si le segment $[\emptyset, b]$ est modulaire et que la paire (x, b) est modulaire pour tout x on dit que l'élément b est modulaire.

Le passage de la notion de treillis distributif au treillis modulaire puis M-symétrique est essentiellement basé sur une restriction de la loi de distributivité à des éléments particuliers. Nous allons maintenant reconsidérer le treillis distributif au point de vue des paires de compléments, c'est-à-dire des couples (a, b) satisfaisant $a \wedge b = \emptyset$ et $a \vee b = I$. On dit alors que b est un complément de a .

Le treillis est dit complémenté si tout élément possède un complément ; il est dit relativement complémenté si tous ses segments sont complémentés. En général dans un treillis complémenté le complément n'est pas unique, mais dans certains treillis dit orthocomplémentés il existe pour chaque élément a un complément particulier a' appelé orthocomplément ; tel que l'application $a \rightarrow a'$ est une involution décroissante : $a \wedge a' = \emptyset$; $a'' = a$; $a \leq b$ implique $b' \leq a'$. Ces conditions impliquent $a \vee a' = I$. Examinons maintenant les diverses structures définissables à partir des propriétés des compléments.

Un treillis est distributif si et seulement si aucun sous-treillis est isomorphe à l'un des treillis des figures 5 et 6, c'est-à-dire si et seulement si dans tout segment le complément relatif est unique.

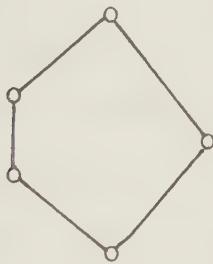


Fig. 5

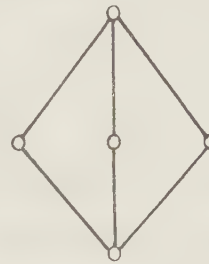


Fig. 6

Dans un treillis complémenté distributif, pour tout élément x du segment $[a, b]$ et son complément y l'élément $(y \vee a) \wedge b = (b \wedge a) \vee (b \wedge y) = a \vee (b \wedge y)$ est un complément relatif dans le segment $[a, b]$. En effet :

$$\begin{aligned} x \vee [a \vee (b \wedge y)] &= a \vee [(x \vee b) \wedge (x \vee y)] = a \vee b = b \\ x \wedge [b \wedge (y \vee a)] &= b \wedge [(x \wedge y) \vee (x \wedge a)] = b \wedge a = a \end{aligned}$$

Dans un treillis orthocomplémenté nous dirons que deux

éléments a et b sont compatibles ($a \longleftrightarrow b$) si et seulement si le plus petit sous-treillis contenant a , a' , b et b' est distributif et nous appellerons centre Z l'ensemble des éléments compatibles avec chacun des autres ; la couverture centrale $z(a)$ d'un élément a étant le plus petit élément du centre majorant a .

Les treillis modulaires peuvent être également caractérisés uniquement en termes de compléments car un treillis est modulaire si et seulement si aucun sous-treillis est isomorphe au treillis de la figure 5, c'est-à-dire si et seulement si aucun segment contient un élément possédant deux compléments relatifs comparables.

Enfin, dans un treillis orthocomplémenté on peut exiger pour affaiblir la distributivité que pour tout élément x du segment $[a, b]$ l'orthocomplément relatif soit fourni par l'élément $(x' \vee a) \wedge b$. Cette condition est équivalente à la condition $a \leq b$ implique $a = b \wedge (a \vee b')$. On dit alors que le treillis est orthomodulaire (voir [4]). Le treillis de la figure 4 est orthocomplémenté $a' = d$ et $c' = b$ mais il n'est pas orthomodulaire car $a \leq c$ et $a \neq c \wedge (a \vee c') = c$. On montre qu'un treillis orthomodulaire et atomique est M-symétrique si et seulement si pour tout atome p et pour tout a , l'élément $(p \vee a') \wedge a$ est, soit un atome, soit nul. Cette dernière condition est appelée loi de couverture.

Nous avons ainsi classé une grande partie des structures particulières des treillis, soit en considérant des rela-

tions de distributivité, soit en considérant les propriétés des compléments. Nous situerons par la suite dans ce contexte la place des treillis fortement orthocomplémentés.

EXEMPLES

Il est temps maintenant de vérifier l'axiome A dans l'ensemble des projecteurs d'une algèbre de von Neumann. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe et soit $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés sur $\mathcal{H}$. Un projecteur est un opérateur linéaire E défini sur tout l'espace de Hilbert et satisfaisant la relation $E E^* = E$. Il en découle immédiatement que $E = E^*$ et par conséquent $E^2 = E$. Le but Δ_E d'un projecteur est un sous-espace et à chaque sous-espace il correspond un unique projecteur. Il existe donc une correspondance biunivoque qui nous permet de les remplacer les uns par les autres. Nous écrirons par exemple $E_1 \quad E_2$ si les sous-espaces correspondants M_1 et M_2 sont inclus l'un dans l'autre. L'inclusion est une relation d'ordre et nous écrirons pour $M_1 \subseteq M_2$, $M_1 \leq M_2$. Il est facile de vérifier que $E_1 \leq E_2$ si et seulement si $E_1 \cdot E_2 = E_1$.

Considérons maintenant deux sous-espaces M et N et les projecteurs E et F correspondants. L'intersection de M et de N au sens des ensembles est encore un sous-espace. C'est le plus grand sous-espace contenu à la fois dans M et dans N et en tant que borne inférieure il sera noté $M \wedge N$. Nous pouvons construire le plus petit sous-espace contenant à la fois M et N en considérant tous les sous-espaces contenant M et N et en prenant leur borne inférieure. Nous noterons le sous-espace ainsi obtenu $M \vee N$ car c'est la borne supérieure des sous-espaces M et N .

Soient $F \wedge E$ et $F \vee E$ les projecteurs correspondants aux sous-espaces $M \wedge N$ et $M \vee N$. Muni de ces deux opérations, l'ensemble des projecteurs forme un treillis complet. D'autre part l'application $E \rightarrow E' \equiv I - E$ est une orthocomplémentation car on vérifie facilement les relations $E'' = E$, $E \wedge E' = \emptyset$, $E \leq F$ implique $F' \leq E'$.

Pour examiner les autres structures nous devons distinguer les algèbres de von Neumann sur un espace de Hilbert fini du cas infini. Si l'espace de Hilbert est de dimension finie, il est aisé de montrer que le treillis des sous-espaces est modulaire. Pour le montrer considérons trois sous-espaces M , N et K avec la relation $M \leq K$. Puisque $M \leq M \vee N$ et $M \leq K$ on a $M \leq (M \vee N) \wedge K$. De même $N \wedge K \leq (M \vee N) \wedge K$. Ainsi si $M \leq K$ on a $M \vee (N \wedge K) \leq (M \vee N) \wedge K$. Pour démontrer la modularité considérons un vecteur $a \in (M \vee N) \wedge K$ qui par définition de l'intersection appartient aux deux sous-espaces $M \vee N$ et K . Mais tout vecteur de $M \vee N$ est somme d'un vecteur b de M et d'un vecteur c de N , car le sous-espace $M \vee N$ est de dimension finie ($a = b + c$). Puisque $b \in M \leq K$ et que $c \in N$ on a $c = a - b \in K \wedge N$. Le vecteur a est donc somme d'un vecteur $b \in M$ et d'un vecteur $c \in N \wedge K$ d'où $a \in M \vee (N \wedge K)$. Ainsi $M \vee (N \wedge K) = (M \vee N) \wedge K$. Vérifions maintenant dans un treillis abstrait, complet, orthocomplémenté et modulaire l'axiome A.

Proposition 3.1

Tout treillis complet, orthocomplémenté et modulaire est fortement orthocomplémenté.

Démonstration :

Soit b un complément de a . Il s'agit de montrer que a et b' sont fortement équivalents. Nous allons commencer par démontrer l'équivalence simple. Pour cela considérons l'application μ définie par

$$\forall u \in [\emptyset, a] \quad \mu(u) = (u \vee b) \wedge b' \in [\emptyset, b']$$

Cette application est surjective. Il suffit en effet de vérifier que tout élément $x \in [\emptyset, b']$ est l'image par μ de $(x \vee b) \wedge a$.

$$\begin{aligned} \mu([x \vee b] \wedge a) &= [\{(x \vee b) \wedge a\} \vee b] \wedge b' \\ &= [(x \vee b) \wedge (a \vee b)] \wedge b' \end{aligned}$$

Remarquons ici que nous avons utilisé la modularité et que l'orthomodularité ne suffirait pas. Ainsi $\mu([x \vee b] \wedge a) = (x \vee b) \wedge b' = x$ en appliquant cette fois l'orthomodularité.

Montrons également que l'application est injective. Soit

$$x, y \in [\emptyset, a] \quad \text{et} \quad \mu(x) = \mu(y) \quad \text{c'est-à-dire} \\ (x \vee b) \wedge b' = (y \vee b) \wedge b' \quad \text{alors}$$

$$[\{(x \vee b) \wedge b'\} \vee b] \wedge a = [\{(y \vee b) \wedge b'\} \vee b] \wedge a$$

et en utilisant l'orthomodularité

$$(x \vee b) \wedge a = (y \vee b) \wedge a \quad \text{puis la modularité}$$

$$x \vee (b \wedge a) = y \vee (b \wedge a) \quad \text{on obtient} \quad x = y.$$

L'application μ est donc bijective et $\mu^{-1}(x) = (x \vee b) \wedge a$. Elle conserve d'autre part manifestement l'ordre.

Montrons encore que cette application laisse invariant le segment $[\emptyset, a \wedge b']$. Soit $u \leq a \wedge b'$, alors

$$\mu(u) = (u \vee b) \wedge b' = u \quad \text{d'après l'orthomodularité.}$$

D'autre part l'image de $z \wedge a$ est $z \wedge b'$ pour tout

élément z du centre du treillis.

$$\begin{aligned}\mu(z \wedge a) &= [(z \wedge a) \vee b] \wedge b' = (z \vee b) \wedge (a \vee b) \wedge b' \\ &= (z \vee b) \wedge b' = (z \wedge b') \vee (b \wedge b') = z \wedge b'\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

Examinons maintenant l'ensemble des sous-espaces d'un espace de Hilbert infini. Si nous reprenons la démonstration de la modularité nous constatons que nous avons écrit le vecteur $a \in M \vee N$ comme somme des vecteurs $b \in M$ et $c \in N$. Or dans un espace de Hilbert de dimension infinie, le vecteur a peut être limite de vecteurs de la forme $(b_i + c_i)$ avec $b_i \in M$ et $c_i \in N$ sans être lui-même de cette forme. Supposons de plus pour simplifier que $M \wedge N = \emptyset$ et soit $K \supseteq M$ le sous-espace engendré par M et le vecteur a . Tout vecteur $x \in N \wedge K$ est de la forme $x = \lambda a + b$ avec $b \in M$ puisque $x \in K$, mais comme $x \in N$ les conditions $b \notin N$ et $\lambda a \notin N$ impliquent $x = \emptyset$, c'est-à-dire $N \wedge K = \emptyset$. Ainsi $M \vee (N \wedge K) = M$ mais $(M \vee N) \wedge K = K \subseteq M$.

L'ensemble des sous-espaces d'un espace de Hilbert de dimension infinie est donc un treillis non modulaire. Ce treillis vérifie par contre la condition plus faible d'orthomodularité que nous allons démontrer dans l'ensemble des projecteurs. Considérons pour cela deux projecteurs vérifiant la relation d'ordre $E \leq F$ ($E \cdot F = E$). On peut écrire F comme somme des deux projecteurs orthogonaux E et $F - E$. En effet $E^2 = E = E^*$ et

$$\begin{aligned}(F - E)^2 &= F^2 + E^2 - E F - F E = F + E - E - E = F - E \\ E(F - E) &= E F - E^2 = E - E = \emptyset.\end{aligned}$$

De plus le projecteur F est bien borne supérieure de E et $F - E$ car pour tout projecteur G tel que $E \leq G \leq F$ et $F - E \leq G \leq F$ on a $F = E + (F - E) \leq G \leq F$. Nous écrirons donc $F = E \vee (F - E)$. On vérifie de même que le projecteur $F - E$ est borne inférieure des projecteurs F et $(I - E)$ car $F \cdot (I - E)$ est un projecteur et pour tout projecteur G tel que $F - E \leq G \leq F$ et $F - E \leq G \leq I - E$ on a $F - E \leq G \leq F \cdot (I - E) = F - F \cdot E = F - E$. Ainsi si $E \leq F$ on a $F = E \vee (F \wedge E')$ ce qui est une des formes de l'orthomodularité. Nous pouvons maintenant procéder à la vérification de l'axiome A dans le treillis des projecteurs sur un espace de Hilbert.

Proposition 3.2

Le treillis des projecteurs sur un espace de Hilbert est un treillis fortement orthocomplémenté.

Démonstration :

Soit E un complément du projecteur F . Il s'agit de montrer que E' et F sont fortement équivalents. Afin que l'isomorphisme désiré laisse invariant les éléments du segment $[\emptyset, F \wedge E']$ nous allons décomposer, grâce à l'orthomodularité les éléments E' et F de manière à isoler $E' \wedge F$.

$$E' = [(E \vee F') \wedge E'] \vee (E' \wedge F) \equiv E_1' \vee (E' \wedge F)$$

$$F = [(E \vee F') \wedge F] \vee (E' \wedge F) \equiv F_1 \vee (E' \wedge F)$$

Vérifions que les projecteurs E_1' et F_1 forment une paire de compléments :

$$\begin{aligned} E_1' \vee F_1 &= [E' \wedge (F' \vee E)] \vee [F' \vee (F \wedge E')] \\ &= \{ (F \wedge E') \vee [(F \wedge E')' \wedge E] \} \vee F' \\ &= E' \vee F' = (E \wedge F)' = I \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_1' \wedge F_1' &= [E' \wedge (F' \vee E)] \wedge [F' \vee (F \wedge E')] \\
 &= E' \wedge (F' \vee E) \wedge F' \\
 &= E' \wedge F' = (E \vee F)' \\
 &= \emptyset.
 \end{aligned}$$

La décomposition polaire des opérateurs $E_1' F_1$ et $(E_1' F_1)^* = F_1 E_1'$ fournit alors une isométrie partielle V telle que

$$\begin{aligned}
 V V^* &= \text{support de } E_1' F_1 = F_1 \wedge (E_1' \vee F_1') = F_1 \\
 V^* V &= \text{support de } F_1 E_1' = E_1' \wedge (F_1 \vee E_1) = E_1'
 \end{aligned}$$

Pour obtenir un isomorphisme du segment $[\emptyset, E']$ sur le segment $[\emptyset, F]$ qui laisse invariant les éléments du segment $[\emptyset, E' \wedge F]$ il suffit de définir μ au moyen de l'isométrie partielle $W = V + E' \wedge F$.

Soit μ telle que $[\emptyset, E'] \ni X \xrightarrow{\mu} \mu(X) \equiv W X W^*$

Il s'agit tout d'abord de vérifier que $W X W^*$ est un projecteur du segment $[\emptyset, F]$.

$$\begin{aligned}
 (W X W^*)^2 &= W X W^* W X W^* = W X E' W^* = W X W^* = (W X W^*)^* \\
 W X W^* F &= W X (V + E' \wedge F)^* F \\
 &= W X (V^* + E' \wedge F) (F_1 + E' \wedge F) \\
 &= W X (V^* + E' \wedge F) \\
 &= W X W^*
 \end{aligned}$$

D'autre part cette application est biunivoque

$$\mu^{-1}(W X W^*) = W^* (W X W^*) W = E' X E' = X$$

Cette application conserve l'ordre car si $X \leq Y \in [\emptyset, E']$

$$\text{alors } (W X W^*) (W Y W^*) = W X E' Y W^* = W X W^*$$

c'est-à-dire que $\mu(X) \equiv W X W^* \leq W Y W^* \equiv \mu(Y)$. Elle conserve donc également les bornes supérieures et inférieures.

Montrons encore que l'image de $Z \wedge E'$ est $Z \wedge F$ pour tout projecteur Z du centre

$$\mu(Z \wedge E') = \mu(Z E') = W Z E' W^* = Z W E' W^* = Z \wedge F.$$

Pour démontrer l'équivalence forte il suffit enfin de vérifier que l'application biunivoque μ laisse bien invariant le segment $[\emptyset, E' \wedge F]$.

Soit $X \in [\emptyset, E' \wedge F]$ d'où $X \cdot E_1' = X \cdot F_1 = \emptyset$

$$\begin{aligned} \mu(X) &= W X W^* = (V + E' \wedge F) X (V^* + E' \wedge F) \\ &= V X V^* + V X (E' \wedge F) + (E' \wedge F) X V^* + (E' \wedge F) X (E' \wedge F) \\ &= V E_1' X V^* + V E_1' X (E' \wedge F) + (E' \wedge F) X E_1' V^* + X \\ &= X \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration de la proposition 3.2 et le paragraphe.

DECOMPOSITION

Rappelons qu'un treillis fortement orthocomplémenté est un treillis complet, orthocomplémenté vérifiant l'axiome A : Tout complément a de b est fortement équivalent à b' , c'est-à-dire qu'il existe un isomorphisme du segment $[\emptyset, a]$ sur le segment $[\emptyset, b']$ qui pour tout élément z du centre applique $z \wedge a$ sur $z \wedge b'$ et qui laisse de plus invariant les éléments du segment $[\emptyset, a \wedge b']$. Un tel treillis est orthomodulaire comme le montre la proposition suivante :

Proposition 4.1

Tout treillis fortement orthocomplémenté est orthomodulaire.

Démonstration :

Soit $a \leq b$; l'élément $b \wedge (a \vee b')$ est alors un complément de a' .

$$a' \vee [b \wedge (a \vee b')] \geq a' \vee a = I$$

$$a' \wedge [b \wedge (a \vee b')] = (a \vee b')' \wedge (a \vee b') = \emptyset$$

Par conséquent en vertu de l'axiome A les éléments

$b \wedge (a \vee b')$ et $(a')' = a$ sont l'image l'un de l'autre par un isomorphisme qui laisse $a = a \wedge [b \wedge (a \vee b')]$

invariant. Ainsi $a = \mu(a) = b \wedge (a \vee b')$ ce qui termine la démonstration.

Expliquons maintenant brièvement l'idée de la décomposition d'un treillis $\mathcal{L}$. L'étape importante est la représentation de tout élément comme borne supérieure de deux éléments a_1 et a_2 ($a = a_1 \vee a_2$). Si de plus les premières composantes et les deuxièmes composantes forment séparément

des sous-treillis $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ on dit que $\mathcal{L}$ est réductible et qu'il est union directe de $\mathcal{L}_1$ et de $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \vee \mathcal{L}_2$. Or chaque treillis $\mathcal{L}$ possède un centre $\mathcal{K}$ groupant tous les éléments de $\mathcal{L}$ compatibles avec chacun des autres. Si le centre est non trivial, c'est-à-dire s'il contient en plus de $\emptyset$ et I un élément z , alors chaque élément a peut être décomposé en utilisant la compatibilité de z , z' et a entre eux :

$$a = (a \wedge z) \vee (a \wedge z')$$

et puisque

$$(a_1 \wedge z) \wedge (a_2 \wedge z) = (a_1 \wedge a_2) \wedge z$$

$$(a_1 \wedge z) \vee (a_2 \wedge z) = (a_1 \vee a_2) \wedge z$$

on voit que l'ensemble des éléments de la forme $a_i \wedge z$ est un sous-treillis de $\mathcal{L}$; le segment $[\emptyset, z]$.

Ainsi nous avons construit une réduction explicite du treillis en deux segments $[\emptyset, z] \equiv \mathcal{L}_1$ et $[\emptyset, z'] \equiv \mathcal{L}_2$ de telle manière que

$$\mathcal{L} = [\emptyset, z] \vee [\emptyset, z'] .$$

Pour la décomposition d'un treillis en union directe de treillis des types I, II et III on peut utiliser les notions d'atome et d'élément fini. Nous choisirons pour les éléments finis la définition suivante :

Un élément a est dit fini si pour toute paire b, c d'éléments équivalents ($c \sim b$), comparables ($c \leq b$) et majorés par a ($c \leq b \leq a$), b et c sont identiques.

Remarquons que la définition classique d'un élément fini dit simplement que tout élément c majoré par a et équivalent à a lui est égal. Dans l'ensemble des projecteurs sur un espace de Hilbert on peut alors déduire que tout élément

majoré par un élément fini est encore fini ce que nous n'avons pas réussi à démontrer dans un treillis fortement orthocomplémenté. Notre définition rend cette propriété triviale et elle permet de démontrer aisément que tout élément équivalent à un élément fini est encore fini.

Proposition 4.2

Tout élément b équivalent à un élément a fini est fini.

Démonstration :

Soient $b_1 \leq b_2 \leq b$ tels que $b_1 \sim b_2$; de la définition de l'équivalence découle l'existence des éléments a_1 et a_2 tels que $a_1 \leq a_2 \leq a$ et $a_{1,2} \sim b_{1,2}$. Ainsi $a_1 \sim b_1 \sim b_2 \sim a_2$ c'est-à-dire que a_1 et a_2 sont équivalents et puisque a est fini ils sont égaux. Or $a_1 = a_2$ est l'image à la fois de b_1 et b_2 pour l'isomorphisme du segment $[\emptyset, a]$ sur le segment $[\emptyset, b]$, donc $b_1 = b_2$ ce qui termine la démonstration.

Pour décomposer le treillis nous allons commencer par montrer que la borne supérieure des atomes ainsi que la borne supérieure des éléments finis sont des éléments du centre. Pour cela il suffit de montrer que pour un élément fini a quelconque la borne supérieure des éléments x équivalents à un élément majoré par a ($x \sim a_i \leq a$) est un élément du centre.

Proposition 4.3

$$\forall a, \bigvee_i \{x \mid x \sim a_i \leq a\} = z(a)$$

Démonstration :

Il s'agit de montrer que cette expression que nous noterons

h est compatible avec tout élément y du treillis, c'est-à-dire que $y \wedge (y' \vee h) = y \wedge h$, ou encore plus simplement

$$y \wedge (y' \vee x) \leq y \wedge (y' \vee h) \leq h.$$

L'élément $x_1 \equiv x \wedge (y \vee x')$ a pour complément $y' \vee (x' \wedge y)$

$$[x \wedge (y \vee x')] \vee [y' \vee (x' \wedge y)] = (y' \vee x) \vee (x' \wedge y) = I$$

$$[x \wedge (y \vee x')] \wedge [y' \vee (x' \wedge y)] = (x \wedge y') \wedge (y \vee x') = \emptyset$$

et d'après l'axiome A les éléments $x_1 = x \wedge (y \vee x')$

et $y \wedge (x \vee y')$ sont donc équivalents. Puisque

$x_1 \leq x \sim a_1 \leq a$ il découle de l'isomorphisme entre les

segments $[\emptyset, x]$ et $[\emptyset, a_1]$ l'existence d'un élément a_2

image de x_1 tel que $x_1 \sim a_2 \leq a_1$.

Ainsi $y \wedge (x \vee y') \sim x_1 \sim a_2 \leq a$ et par conséquent

$y \wedge (x \vee y') \leq h$. L'élément h fait donc partie du centre ;

il reste à montrer que c'est le plus petit élément du centre qui majore a .

Soit $z \in \mathcal{Z}$ tel que $z \geq a$, d'où $z \geq z(a)$. Or $z(x) = z(a_1)$

car l'équivalence des éléments x et a_1 implique l'existence

d'un isomorphisme μ tel que $z(x) \wedge a_1 = \mu[z(x) \wedge x]$

$= \mu(x) = a_1$ et pour tout $z \in \mathcal{Z}$ tel que $z \geq a_1$,

$x = \mu^{-1}(a_1) = \mu^{-1}(z \wedge a_1) = z \wedge x$, c'est-à-dire

$z \geq z(x) \geq x$. Par conséquent $x \leq z(x) = z(a_1) \leq z(a) \leq z$

quel que soit x tel que $x \sim a_1 \leq a$. Ainsi tout élément

z du centre majorant a , majore également h qui est donc

bien la couverture centrale de a . Ceci termine la démonstration.

La dernière partie de cette proposition utilise de manière essentielle le fait que pour deux éléments a et b équivalents et pour tout élément z du centre, l'image par l'application μ de $z \wedge a$ est $z \wedge b$. Cette condition

n'est pas indispensable pour la décomposition du treillis en types I, II et III mais par contre elle permet la décomposition du type I en parties irréductibles. En effet sans elle tous les atomes sont équivalents entre eux. Dans l'interprétation que nous proposons en conclusion nous aimerions omettre cette condition sans perdre la possibilité de décomposition du type I en treillis irréductibles. Nous utiliserons alors la remarque suivante :

Remarque 4.3

Considérons les ensembles définis par récurrence :

$$A_0 = \{a\} , \quad A_{n+1} = \{(a_n \vee x') \wedge x, a_n \in A_n \text{ et } x \in \mathcal{L}\} \\ \text{alors } z(a) = \sup(\bigcup_i A_i) .$$

Démonstration :

$$\text{Posons } k = \bigvee_i \{a_i \mid a_i \in \bigcup_n A_n\} \text{ on a pour tout } y \\ \text{du treillis } (k \vee y') \wedge y = [(\bigvee_i a_i) \vee y'] \wedge y = \\ [\bigvee_i (a_i \vee y')] \wedge y = \bigvee_i [(a_i \vee y') \wedge y] \leq k .$$

Ainsi $(k \vee y') \wedge y \leq k \wedge y$, ce qui signifie que k est compatible avec tout y du treillis puisque pour tout k et y on a $(k \vee y') \wedge y \geq k \wedge y$, c'est-à-dire $(k \vee y') \wedge y = k \wedge y$.

Il faut encore montrer que k est bien la couverture centrale de a . Il suffit de constater que s'il existe $z \in \mathcal{X}$ tel que $a < z$ alors

$$(a \vee x') \wedge x = [a \vee \{(x' \vee z') \wedge (x' \vee z)\}] \wedge x \\ = \{a \vee (x' \vee z')\} \wedge (x' \vee z) \wedge x$$

car $x' \vee z$ est compatible avec $x' \vee z'$ puisque $(x' \vee z)'$ est majoré par $x' \vee z'$ et de même $x' \vee z$ est compatible avec a puisque $x' \vee z$ majore a . Ainsi

$$(a \vee x') \wedge x = \{a \vee (x \wedge z)'\} \wedge (x \wedge z) < z .$$

Tout élément de l'ensemble A_1 est donc majoré par z et par récurrence tout élément de $\bigcup_n A_n$ est majoré par z c'est-à-dire $k \leq z$. Ainsi se termine la démonstration de la remarque.

Passons maintenant à la décomposition du treillis et commençons par extraire l'ensemble des atomes. Il suffit de se convaincre que tout élément équivalent à un atome est un atome. La proposition précédente montre que l'union de tous les atomes est un élément du centre.

$$\bigvee_i p_i = \bigvee_i \left[\bigvee_j \{q_j \mid q_j \sim p_i\} \right] = \bigvee_i z_i \equiv z_I$$

On peut alors décomposer le treillis en union directe des sous-treillis $[\emptyset, z_I]$ et $[\emptyset, z_I']$. Du deuxième treillis extrayons l'ensemble des éléments finis f_i .

$$\bigvee_i f_i = \bigvee_i \left[\bigvee_j \{f_j \mid f_j \sim b \leq f_i\} \right] = \bigvee_i z_i \equiv z^*$$

On obtient ainsi une première décomposition

$$[\emptyset, I] = [\emptyset, z_I] \vee [\emptyset, z_{II}] \vee [\emptyset, z_{III}]$$

$$\text{avec } z_{II} = z_I' \wedge z^* \text{ et } z_{III} = z_I' \wedge z^{*'}.$$

Le segment $[\emptyset, z_{III}]$ est de type III puisqu'il ne contient aucun élément fini. Pour les segments $[\emptyset, z_I]$ et $[\emptyset, z_{II}]$ il faut par contre encore vérifier qu'ils sont bien de type I et II.

Proposition 4.4

Tout élément du segment $[\emptyset, z_I]$ (resp. $[\emptyset, z_{II}]$) est union d'atomes (resp. d'éléments finis).

Démonstration :

Soit $\{p_j\}$ une famille maximale orthogonale d'atomes (resp. éléments finis) majorés par a . Soit $x \equiv a \wedge (\bigvee_j p_j)'$

le complément de $(\bigvee^j p_j)$ dans a . Pour tout atome q la projection de q sur x fournit un élément $(q \vee x') \wedge x$ équivalent à l'élément $(x \vee q') \wedge q$. L'élément $(q \vee x') \wedge x$ serait donc, soit un nouvel atome si $(x \vee q') \wedge q = q$ ce qui contredirait la maximalité de la famille $\{p_j\}$, soit nul si $(x \vee q') \wedge q = \emptyset$ d'où $x \leq q'$. Ainsi $a \wedge (\bigvee^j p_j)' \leq q_i'$ ce qui implique $a \wedge (\bigvee^j p_j)' \leq \bigwedge_i q_i'$. Or $a \wedge (\bigvee^j p_j)' \leq \bigvee^i q_i$ car il appartient au segment $[\emptyset, z_I]$ (resp. $[\emptyset, z_{II}]$). On en déduit que $a \wedge (\bigvee^j p_j)' \leq (\bigwedge_i q_i') \wedge (\bigvee^i q_i) = \emptyset$ et $a \leq \bigvee^j p_j$ c'est-à-dire $a = \bigvee^j p_j$ ce qui termine la démonstration.

Lorsque dans les types I et II l'élément le plus grand d'un segment $[\emptyset, z(f)]$ est fini nous dirons que ces treillis sont de type I_n et II_1 . Il suffit alors de construire l'union directe de tous ces treillis finis pour obtenir la partie finie du treillis original car l'union de deux éléments finis du centre est encore un élément fini à condition de prendre la définition complète de l'équivalence.

Abordons maintenant l'étude individuelle de chacun des types en commençant par le type I. La proposition suivante va nous permettre de démontrer que chaque treillis $[\emptyset, z(q)]$ avec q un atome, est irréductible.

Proposition 4.5

Si p est un atome tel que $p \leq z(q)$ alors $q \leq z(p)$.

Démonstration :

Nous allons utiliser les ensembles A_n introduits dans la

la remarque 4.3

Si $p \leq z(q) = \bigvee^k \{q_k \mid q_k \in \bigcup^n A_n^{(q)}\}$ alors il existe un atome $q_n \in A_n^{(q)}$ non orthogonal à p .

Ainsi $(p \vee q_n') \wedge q_n = q_n$ c'est-à-dire $q_n \in A_1^{(p)}$.

Or de $q_n \in A_n^{(q)}$ découle $q_n = (q_{n-1} \vee a') \wedge a$ avec $q_{n-1} \in A_{n-1}^{(q)}$ et $a \in \mathcal{A}$. Il suffit alors de montrer que

l'élément $(q_n \vee q_{n-1}') \wedge q_{n-1}$ est non nul car dans ce cas $q_{n-1} = (q_n \vee q_{n-1}') \wedge q_{n-1} \in A_2^{(p)}$.

En effet si $(q_n \vee q_{n-1}') \wedge q_{n-1} = \emptyset$ alors

$q_n \vee q_{n-1}' \leq q_{n-1}'$ c'est-à-dire $q_n \leq q_{n-1}'$ d'où

$q_n \leq q_{n-1}' \wedge [(q_{n-1} \vee a') \wedge a] = \emptyset$ ce qui est impossible puisque q_n est un atome.

Par récurrence on obtient $q_1 = (q \vee x') \wedge x$ avec

$q \in A_0^{(q)}$ et $x \in \mathcal{A}$ d'où $q = (q_1 \vee q') \wedge q \in A_n^{(p)}$

c'est-à-dire $q \leq z(p)$ ce qui termine la démonstration.

Des propositions 4.4 et 4.5 découle alors immédiatement l'irréductibilité du segment $[\emptyset, z(q)]$ car si z est un élément du centre de $[\emptyset, z(q)]$ la proposition 4.4 assure l'existence d'un atome $p \leq z \leq z(q)$ d'où d'après 4.5 $q \leq z(p) \leq z$ et ainsi $z = z(q)$ puisque $z(q)$ est la couverture centrale de q . Le treillis de type I est donc union directe de treillis complets, orthomodulaires, irréductibles, atomiques et vérifiant la loi de couverture puisque pour tout atome p les éléments $(p \vee a') \wedge a$ et $(a \vee p') \wedge p$ sont équivalents, c'est-à-dire soit nuls si $p \leq a'$, soit des atomes.

Dans les treillis de type II on vérifie une autre propriété importante.

Proposition 4.6

Tout élément fini est un élément modulaire.

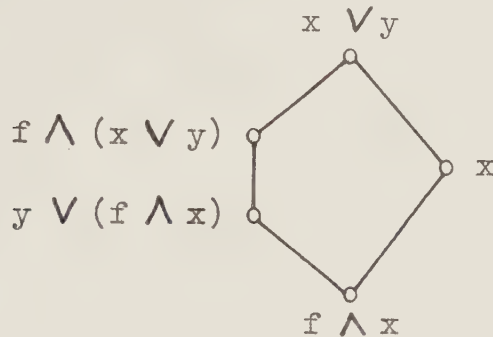
Démonstration :

Soit f un élément fini. Supposons par l'absurde qu'il existe $y < f$ et x tels que $y \vee (f \wedge x) < f \wedge (x \vee y)$.

Alors on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} x \vee y &\geq x \vee [f \wedge (x \vee y)] \geq x \vee [y \vee (f \wedge x)] \geq x \vee y \\ f \wedge x &\leq x \wedge [y \vee (f \wedge x)] \leq x \wedge [f \wedge (x \vee y)] = x \wedge f \end{aligned}$$

On obtient donc un sous-treillis du type



Les éléments $f \wedge (x \vee y)$ et $y \vee (f \wedge x)$ ont pour complément commun l'élément $[x \vee (x \vee y)]' \wedge (f \wedge x)'$. Ainsi d'après l'axiome A ils sont équivalents et donc égaux puisqu'ils sont tous deux majorés par f et donc finis. Cela contredit l'hypothèse et termine la démonstration.

Il découle de la proposition 4.5 que les treillis de type I_n et II_1 sont modulaires. Citons aussi les résultats de F. Maeda [3] qui sont valables dans un treillis fortement orthocomplémenté car la relation d'équivalence que nous avons introduite vérifie ses axiomes. En particulier si nous appelons minimal un élément m tel que $b \leq m$ implique $b = m \wedge z(b)$, alors on montre que l'élément maximal du treillis de type I est la couverture centrale d'un élément minimal. De même l'élément maximal du treillis

de type II est la couverture centrale d'un élément fini.

Pour que l'analogie avec la décomposition des algèbres de von Neumann soit complète il manque la propriété suivante : si $\{a_i\}_1$ est une famille d'éléments deux à deux orthogonaux et si $\{b_i\}_1$ est une seconde famille orthogonale indexée de la même manière et telle que $a_i \sim b_i$ pour tout i , alors $\bigvee_i a_i$ est équivalent à $\bigvee_i b_i$. Cette propriété de la relation d'équivalence est vérifiée dans une algèbre de von Neumann car si

$$\begin{aligned} b_i &= W_i a_i W_i^* \quad \text{alors} \\ b &= \bigvee_i b_i = \sum_i b_i = \sum_i W_i a_i W_i^* \\ &= \left(\sum_i W_i \right) \left(\sum_i a_i \right) \left(\sum_i W_i^* \right) \\ &\equiv W a W^* \end{aligned}$$

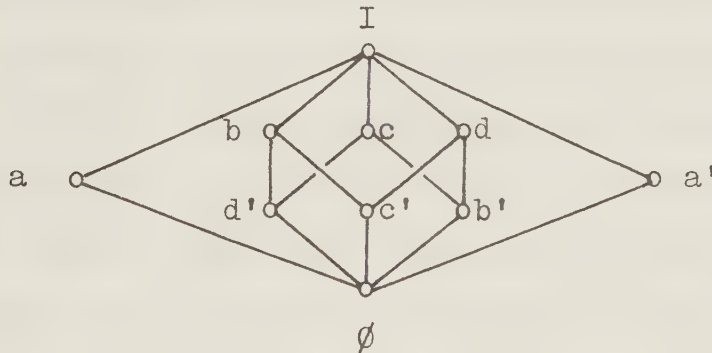
$$\begin{aligned} \text{car } W_i a_j &= (W_i a_i) a_j = (\emptyset \text{ si } i \neq j) (W_j a_j \text{ si } i = j) \\ \text{et } a_j W_i^* &= a_j (a_i W_i^*) = (\emptyset \text{ si } i \neq j) (a_j W_j^* \text{ si } i = j) \end{aligned}$$

Cette propriété permet entre autre d'utiliser la définition usuelle de l'élément fini. Il suffit de remplacer la proposition 4.3 par le lemme 6 de Loomis (voir [1]). On peut alors également démontrer que $a \sim b_1 \leq b$ et $b \sim a_1 \leq a$ implique $a \sim b$, condition que nous allons postuler dans l'interprétation de l'axiome A que nous proposons en conclusion.

CONCLUSION

Avant d'aborder l'interprétation de l'axiome A nous allons commencer par situer le treillis fortement orthocomplémenté parmi les autres treillis orthocomplémentés.

Les treillis fortement orthocomplémentés que nous avons introduit dans ce travail possèdent une structure plus forte que l'orthomodularité puisqu'ils satisfont la loi de couverture qui peut ne pas être vérifiée dans un treillis orthomodulaire. En effet le treillis suivant est orthomodulaire



mais l'élément $a \vee d' = I$ ne couvre pas d' . Ce treillis ne vérifie pas non plus l'axiome A car a est un complément de b mais les segments $\emptyset, a'$ et $\emptyset, b$ ne sont pas isomorphes. On peut donc se demander si l'axiome A et la loi de couverture sont équivalents dans un treillis orthomodulaire atomique. Lorsque l'élément maximal est union d'un nombre fini d'atomes nous savons (voir 4) qu'un treillis atomique, orthomodulaire et vérifiant la loi de couverture est modulaire ; il vérifie par conséquent l'axiome A et une construction explicite de l'isomorphisme est alors possible (voir proposition 3.1). Dans le cas général on peut utiliser le résultat de C. Piron (voir 4 th.22)

à savoir que tout treillis orthomodulaire, atomique, atomique et vérifiant la loi de couverture est isomorphe aux sous-espaces vectoriels fermés d'un certain espace de Hilbert généralisé. Par la proposition 3.2 on sait alors que l'axiome A est vérifié si le corps est celui des réels, des complexes ou des quaternions. La construction explicite de l'isomorphisme semble par contre très difficile et nous ne voyons pas comment aborder ce problème.

Pour les treillis orthomodulaires non atomiques l'axiome A fournit donc au même titre que la M-symétrie (voir [6]) une généralisation de la loi de couverture. La comparaison de ces deux structures serait particulièrement intéressante mais nous n'avons pas trouvé de résultat valable. Par contre, en nous basant sur le rôle essentiel des compléments dans la définition du treillis fortement orthocomplémenté, nous pouvons le situer dans une classification par ordre croissant de généralité et basée uniquement sur les propriétés des compléments :

Les treillis orthocomplémentés distributifs.

Les treillis orthocomplémentés modulaires.

Les treillis fortement orthocomplémentés.

Les treillis orthomodulaires.

Les études récentes (voir [4]) sur l'approche axiomatique de la physique quantique conventionnelle ont rendu explicite l'origine de la structure du calcul des propositions en justifiant par des faits empiriques la structure de treillis orthomodulaire. L'introduction de cette structure est essentiellement motivée par l'étude de la notion de

compatibilité et de son lien avec une relation d'ordre fournie par l'implication et définie comme suit : on dit qu'une proposition a implique une proposition b si " a vraie" entraîne " b vraie" et on note cette circonstance par $a \rightarrow b$. On admet alors que deux propositions a et b sont compatibles ($a \leftrightarrow b$) si elles sont comparables ($a \rightarrow b$ ou $b \rightarrow a$). La signification physique de cet axiome est immédiate et nous renvoyons le lecteur intéressé à la référence [4].

En plus de l'ordre partiel entre propositions, une analyse, même superficielle, du treillis des propositions permet souvent de mettre en évidence des isomorphismes entre certains sous-treillis. Et puisque la structure du treillis décrit la nature du système étudié, ces isomorphismes caractérisent des propriétés très profondes de ce système. Pour en faciliter l'étude nous allons nous intéresser ici uniquement aux isomorphismes entre certains sous-treillis particuliers : les segments.

Si pour deux propositions a et b il existe une application bijective μ du segment $[\emptyset, a]$ sur le segment $[\emptyset, b]$ qui conserve au moins l'ordre, alors la structure des segments $[\emptyset, a]$ et $[\emptyset, b]$ fournit la même information sur le système étudié et nous dirons que a et b sont deux propositions équivalentes ($\sim$). Il faut remarquer que la définition introduite ici est légèrement plus faible que celle utilisée dans le reste du travail car nous avons volontairement omis d'exiger que μ applique $z \wedge a$ sur $z \wedge b$ pour tout élément z du centre. Cette

dernière condition est en effet difficilement interprétable et non indispensable pour la décomposition du treillis (voir remarque 4.3).

Avec cette relation d'équivalence nous pouvons établir une nouvelle comparaison partielle des propositions de la manière suivante : si une proposition a est équivalente à une proposition b_1 qui implique b ($a \sim b_1 \leq b$) alors la quantité d'information fournie par a sur le système est plus grande que celle fournie par b et nous noterons cette situation par $a \propto b$. La relation $\propto$ est manifestement transitive et idempotente mais en l'absence d'une structure plus complète du treillis des propositions il est impossible de déduire des relations $a \propto b$ et $b \propto a$ l'équivalence de a et b . Pour compléter notre connaissance de la relation $\propto$ nous allons maintenant étudier son lien avec les autres structures du treillis.

Rappelons tout d'abord que pour chaque proposition a , on définit une nouvelle proposition a' par l'échange des termes de l'alternative, le "oui" devenant "non" et réciproquement. De la sorte on peut tester d'un même coup les hypothèses a vraie et a' vraie. On se trouve alors inmanquablement conduit, après la mesure, à rejeter l'une des deux. En d'autres termes $a' \wedge a = \emptyset$ où $\emptyset$ désigne la proposition jamais vraie. Il est raisonnable de postuler que toute proposition b vérifiant la relation $a \wedge b = \emptyset$ donne une information sur le système au moins égale sinon supérieure à celle fournie par a' . C'est-à-dire que a' est la proposition x la plus faible vérifiant la relation

$a \wedge x = \emptyset$. Et puisque la nature du système étudié est décrite par la structure du treillis des propositions cela signifie $b \propto a'$ mais pas nécessairement $b \leq a'$.

Dans un treillis fortement orthocomplémenté, la relation $b \propto a$ découle en effet de $a' \wedge b = \emptyset$ puisqu'il suffit de prendre pour a_1 la projection $(b \vee a') \wedge a$ de b sur a . Les deux propositions $(b \vee a') \wedge a = a_1$ et $(a \vee b') \wedge b = b$ sont alors équivalentes car b' est un complément de a_1 . Par contre $b \wedge a' = \emptyset$ n'entraîne pas nécessairement $b \leq a$ car sinon un treillis de propositions complémenté serait distributif ce qui n'est généralement pas vérifié. D'autre part si $b \wedge a' = \emptyset$ alors la distributivité entraîne $a = \emptyset \vee a = (b \wedge a') \vee a = (b \vee a) \wedge (a' \vee a)$ d'où l'on tire $a = b \vee a$ et $b \leq a$ seulement si $a' \vee a =$ ce que nous ne voulons pas postuler.

Il semble cependant que si nous admettons que $a \wedge b = \emptyset$ entraîne $a \propto b'$ et $b \propto a'$ il soit également raisonnable d'admettre que pour deux propositions compatibles ($a \leftrightarrow b$) $a \wedge b = \emptyset$ implique $a \leq b'$ et $b \leq a'$. Avec cette hypothèse supplémentaire l'application $a \rightarrow a'$ est une orthocomplémentation car si $a \leq b$ alors a et b sont compatibles et $a \wedge b' = \emptyset$, d'où l'on déduit $b' \leq a'$. On vérifie alors que $(a' \wedge b')'$ est borne supérieure de a et b d'où $a \vee a' = (a' \wedge a)' = \emptyset' = I$.

Remarquons encore que lorsque la proposition a donne une information supérieure à la proposition b ($a \propto b$) et réciproquement ($b \propto a$) il est raisonnable d'admettre que

a et b sont équivalents ($a \sim b$). Aussi proposons-nous le système d'axiomes suivant :

$$A_1 \quad a \leq b \quad \text{implique} \quad a \leftrightarrow b$$

$$A_2 \quad a \wedge b = \emptyset \quad \text{implique} \quad \begin{cases} b \propto a' \\ b \leq a' \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall a, b \\ \text{si } a \leftrightarrow b \end{matrix}$$

$$A_3 \quad a \propto b \quad \text{et} \quad b \propto a \quad \text{implique} \quad a \sim b.$$

Le postulat A confère alors au treillis complet de l'ensemble des propositions sur un système physique, la structure permettant de le décomposer en union directe de trois treillis d'une manière analogue à la décomposition des algèbres de von Neumann. Avec l'interprétation récente de la notion d'état (voir [7]) on peut alors justifier l'utilisation du treillis de type I comme le mieux apte, car atomique, à décrire l'ensemble des phénomènes physiques tout en laissant ouverte la possibilité d'une interprétation des types II et III.

REFERENCES

- [1] L.H. LOOMIS The lattice theoretic background of the
dimension theory.
Memoirs of the American Mathematical
Society.
18 (1955) p.1
- [2] S. MAEDA Dimension functions on certain general
lattices.
J.Sciences of the Hiroshima University
19 (1955) p.211
- [3] F. MAEDA Decomposition of general lattices into
direct summands of types I,II,III.
J.Sciences of the Hiroshima University
23 (1959) p.151
- [4] C. PIRON Axiomatique quantique.
Helvetica Physica Acta
37 (1964) p.439
- [5] M.D. MACLAREN Nearly orthocomplemented lattices.
Trans. of the American Math. Society
114 (1965) p.401
- [6] E.A. SCHREINER Modular pairs in orthomodular lattices.
Pacific Journal of Mathematics
19 (1966) p.519
- [7] J.M. JAUCH On the structure of quantal systems.
C. PIRON Helvetica Physica Acta.
42 (1969) p.842

Hans-Peter MATTER
DE LA DECOMPOSITION DES
TREILLIS ORTHOMODULAIRES
1970